Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций по математике

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ

Москва 2022

Оглавление

9 КЛАСС

1. 100-значное число имеет вид $a = 1777 \dots 76$ (по середине – 98 цифр 7). Число $\frac{1}{a}$ представили в виде бесконечной периодической дроби. Найдите её период. Ответ обоснуйте.

Решение:

Заметим, что $a = 16 \cdot 111 \dots 11$. Последнее число b состоит из 99 единиц. По правилам перевода обыкновенной дроби в десятичную, число $\frac{1}{b} = 0,(00 \dots 09)$. Её период равен 99. Тогда при умножении этой дроби на число $\frac{1}{16} = 0{,}0625$ период не изменится.

Ответ: 99.

2. Есть 5 клеток. Двое поочередно слева направо вписывают в эти клеточки по одной из цифр 1 или 2. Если получившееся в итоге 5-значное число будет делиться на 3, то выиграет игрок, ходивший первым, а если не будет делиться на 3 – то вторым. Какой из игроков выиграет при правильной своей игре и любой игре соперника? Ответ обосновать.

Решение:

Напомним признак делимости числа на 3: целое число делится нацело на 3 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится нацело на 3.

Приведём выигрышную стратегию для второго игрока. На каждом шаге, если первый напишет 1, второй – 2. Если первый напишет 2, второй – 1. В итоге на 4-ом шаге записанных цифр делится на 3. А значит, что бы в 5–ю клетку ни вписал первый, получившееся 5-значное число не будет делиться на 3.

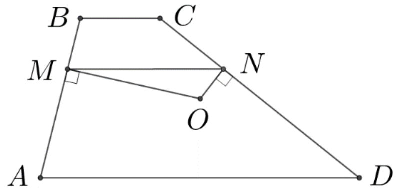
Ответ: второй игрок.

3. Пусть A – множество всех таких целых чисел, которые представимы в виде $x^2 + 2y^2$ где x, y – целые числа. Пусть B – множество всех таких целых чисел, которые представимы в виде $x^2 - 6xy + 11y^2$ где x, y – целые числа (например, $6 \in A, \text{т. к.}\ 6 = 2^2 + 2 \cdot 1^2$). Равны ли множества A и B? Ответ обоснуйте.

Решение:

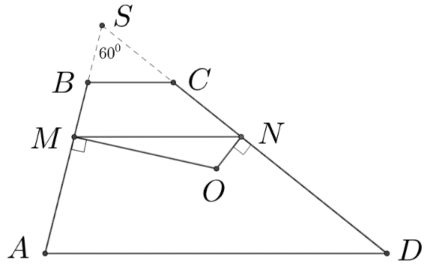
Перепишем элементы множества B виде $x^2 - 6xy + 11y^2 = (x - 3y)^2 + 2y^2$. Отсюда очевидно, что любой элемент множества A является элементом множества B и наоборот.

4. Основания трапеции $ABCD$ связаны соотношением $AD = 4 \cdot BC$, сумма углов $\angle A + \angle D = 120^0$. На боковых сторонах выбраны точки M и N таким образом, что $CN{:}ND = BM{:}MA = 1{:}2$. Перпендикуляры, восстановленные в точках M и N к боковым сторонам трапеции, пересекаются в точке O. Найдите AD, если $AO = 1$.



Решение:

Продлим боковые стороны до их пересечения в точке S. Угол S равен 60^0. Треугольники ASD и BSC подобны; коэффициент подобия равен 4. Кроме того, по условию AM вдвое длиннее BM. Отсюда несложно заметить, что $BS = BM$. Поэтому $AM = MS$. Следовательно MO – серединный перпендикуляр к стороне AS. Аналогично, NO – серединный перпендикуляр к DS. Таким образом, точка O – центр описанной около треугольника ASD окружности, а AO – ее радиус. Запишем формулу для радиуса описанной окружности $AO = \frac{AD}{2 \cdot \sin \angle S}$. Отсюда $AD = \sqrt{3}$.



Ответ: $\sqrt{3}$.

5. Найдите количество цифр в десятичной записи числа 2^{120}, если известно, что десятичная запись числа 2^{200} содержит 61 цифру.

Решение:

Чтобы понять сколько цифр содержится в записи натурального числа a, надо найти такое неотрицательное целое число n, что будет справедливым неравенство $10^{n-1} \le a < 10^{n}$. Такое число n, очевидно, единственно. (Например, $10^2 \le 992 < 10^3$, поэтому в записи числа 992 три цифры.) Итак, надо найти такое целое неотрицательное n, что $10^{n} \le 2^{120} < 10^{n+1}$. По условию $10^{60} \le 2^{200} < 10^{61}$. Возведя обе части в степень $\frac{3}{5}$, получим $10^{36} \le 2^{120} < 10^{36+\frac{3}{5}}$. Значит, в десятичной записи числа 2^{120} содержится 37 цифр.

Ответ: 37.

6. Обозначим через $a_{n,m}$ число, полученное записью подряд всех чисел от n до m включительно, здесь n и m – натуральные числа, причем $n > m \ge 1$. Так, например, число $a_{4,2} = 432$, а число $a_{11,7} = 1110987$. Докажите, что среди таких чисел есть число, делящееся на 2021.

Решение:

Рассмотрим числа вида $a_{n,1}$. Так как чисел указанного вида бесконечно много, то среди них найдутся два числа $a_{n,1}$ и $a_{k,1}$, $n > k$, имеющие одинаковые остатки от деления на 2021. Тогда разность $a_{n,1} - a_{k,1}$ делится нацело на 2021. При этом $a_{n,1} - a_{k,1} = a_{n,k+1} \cdot 10^{n-k}$. Так как числа 2021 и 10^{n-k} взаимно просты, то число $a_{n,k+1}$ делится нацело на 2021.

7. Докажите, что система уравнений не имеет решений:

$$\begin{cases} x^3 + x + y + 1 = 0 \\ yx^2 + x + y = 0 \\ y^2 + y - x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Решение:

Заметим, что $y(x^3 + x + y + 1) - x(yx^2 + x + y) = y^2 + y - x^2 = 0$, что противоречит третьему равенству системы.

8. Зафиксируем 10 натуральных чисел $n_1, n_2, \dots, n_{10}$ и обозначим через n их сумму $n = n_1 + \dots + n_{10}$. Предположим теперь, что на доске в строчку записаны n чисел $a_1, \dots, a_n$, каждое из которых равно либо 0, либо 1. Эти числа (в том порядке как они записаны) разбивают на 10 групп:

$$\underbrace{a_1, \dots, a_{n_1}}_{n_1}, \underbrace{a_{n_1+1}, \dots, a_{n_1+n_2}}_{n_2}, \dots, \underbrace{a_{n_1+\dots n_9+1}, \dots, a_n}_{n_{10}}.$$

Группу назовем ненулевой, если в ней содержится хотя бы одна 1. В результате разбиения, в зависимости от того какие числа $a_1, \dots, a_n$ были взяты изначально, можно получить то или иное число ненулевых групп. Нас будут интересовать такие наборы $a_1, \dots, a_n$, которые при указанном разбиении дают четное число ненулевых групп. Докажите, что число таких наборов $a_1, \dots, a_n$ (где ненулевых групп будет четно) находится по формуле:

$$2^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot (2^{n_1} - 2) \cdot (2^{n_2} - 2) \cdot \ldots \cdot (2^{n_{10}} - 2).$$

Решение:

Искомое число наборов находим суммируя количество наборов с заданным числом k ненулевых групп:

При k=0 такой набор единственный;

При k=2 $\sum_{1 \le i < j \le 10} (2^{n_i} - 2) \cdot (2^{n_j} - 2)$;

при k=4 $\sum_{1\le i<j<l<s\le 10}(2^{n_i}-2)\cdot(2^{n_j}-2)\cdot(2^{n_l}-2)\cdot(2^{n_s}-2)$;

…

при k=10 $(2^{n_1}-2)\cdot(2^{n_2}-2)\cdot\ldots\cdot(2^{n_{10}}-2)$.

Определим многочлены $\sigma_k(x_1,\ldots,x_{10})=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le 10} x_{i_1},\ldots,x_{i_{10}}$.

Тогда искомое число равно $N=\sigma_0(2^{n_1}-1,\ldots,2^{n_{10}}-1)+\sigma_2(2^{n_1}-1,\ldots,2^{n_{10}}-1)+\cdots+\sigma_{10}(2^{n_1}-1,\ldots,2^{n_{10}}-1)$.

Заметим, что

$\sigma_0(x_1,\ldots,x_{10})+\sigma_1(x_1,\ldots,x_{10})+\cdots+\sigma_{10}(x_1,\ldots,x_{10})=(x_1+1)\cdot\ldots\cdot(x_{10}+1)$;

$\sigma_0(-x_1,\ldots,-x_{10})+\sigma_1(-x_1,\ldots,-x_{10})+\cdots+\sigma_{10}(-x_1,\ldots,-x_{10})=(-x_1+1)\cdot\ldots\cdot(-x_{10}+1)$;

$$\sigma_0(x_1,\ldots,x_{10})+\sigma_1(x_1,\ldots,x_{10})+\cdots+\sigma_{10}(x_1,\ldots,x_{10})+$$
$$+\sigma_0(-x_1,\ldots,-x_{10})+\sigma_1(-x_1,\ldots,-x_{10})+\cdots+\sigma_{10}(-x_1,\ldots,-x_{10})$$
$$=2(\sigma_0(x_1,\ldots,x_{10})+\sigma_2(x_1,\ldots,x_{10})+\cdots+\sigma_{10}(x_1,\ldots,x_{10})).$$

Отсюда получим $\sigma_0(x_1,\ldots,x_{10})+\sigma_2(x_1,\ldots,x_{10})+\cdots+\sigma_{10}(x_1,\ldots,x_{10})=\frac{1}{2}((x_1+1)\cdot\ldots\cdot(x_{10}+1)+(-x_1+1)\cdot\ldots\cdot(-x_{10}+1))$.

Следовательно,

$N=\frac{1}{2}\cdot 2^{n_1}\cdot\ldots 2^{n_{10}}+(-2^{n_1}+1+1)\cdot\ldots\cdot(-2^{n_{10}}+1+1)=2^{n-1}+\frac{1}{2}\cdot(2^{n_1}-2)\cdot\ldots\cdot(2^{n_{10}}-2)$.

10 КЛАСС

1. 100-значное число имеет вид $a = 1777 \dots 76$ (по середине – 98 цифр 7). Число $\frac{1}{a}$ представили в виде бесконечной периодической дроби. Найдите её период. Ответ обоснуйте.

Решение:

Заметим, что $a = 16 \cdot 111 \dots 11$. Последнее число b состоит из 99 единиц. По правилам перевода обыкновенной дроби в десятичную, число $\frac{1}{b} = 0,(00 \dots 09)$. Её период равен 99. Тогда при умножении этой дроби на число $\frac{1}{16} = 0{,}0625$ период не изменится.

Ответ: 99.

2. Есть 5 клеток. Двое поочередно слева направо вписывают в эти клеточки по одной из цифр 1 или 2. Если получившееся в итоге 5-значное число будет делиться на 3, то выиграет игрок, ходивший первым, а если не будет делиться на 3 – то вторым. Какой из игроков выиграет при правильной своей игре и любой игре соперника? Ответ обосновать.

Решение:

Напомним признак делимости числа на 3: целое число делится нацело на 3 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится нацело на 3.

Приведём выигрышную стратегию для второго игрока. На каждом шаге, если первый напишет 1, второй – 2. Если первый напишет 2, второй – 1. В итоге на 4-ом шаге записанных цифр делится на 3. А значит, что бы в 5–ю клетку ни вписал первый, получившееся 5-значное число не будет делиться на 3.

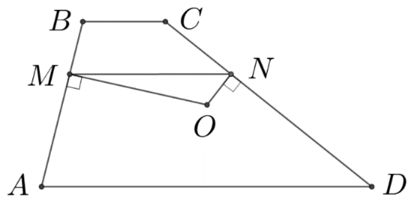
Ответ: второй игрок.

3. Пусть A – множество всех таких целых чисел, которые представимы в виде $x^2 + 2y^2$ где x, y – целые числа. Пусть B – множество всех таких целых чисел, которые представимы в виде $x^2 - 6xy + 11y^2$ где x, y – целые числа (например, $6 \in A, \text{т.к.}\, 6 = 2^2 + 2 \cdot 1^2$). Равны ли множества A и B? Ответ обоснуйте.

Решение:

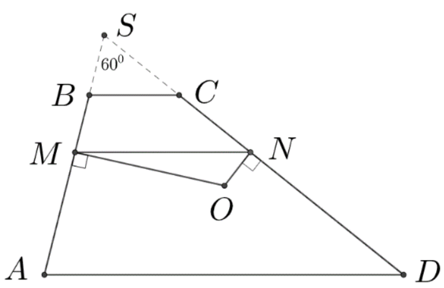
Перепишем элементы множества B виде $x^2 - 6xy + 11y^2 = (x - 3y)^2 + 2y^2$. Отсюда очевидно, что любой элемент множества A является элементом множества B и наоборот.

4. Основания трапеции $ABCD$ связаны соотношением $AD = 4 \cdot BC$, сумма углов $\angle A + \angle D = 120^0$. На боковых сторонах выбраны точки M и N таким образом, что $CN{:}ND = BM{:}MA = 1{:}2$. Перпендикуляры, восстановленные в точках M и N к боковым сторонам трапеции, пересекаются в точке O. Найдите AD, если $AO = 1$.



Решение:

Продлим боковые стороны до их пересечения в точке S. Угол S равен 60^0. Треугольники ASD и BSC подобны; коэффициент подобия равен 4. Кроме того, по условию AM вдвое длиннее BM. Отсюда несложно заметить, что $BS = BM$. Поэтому $AM = MS$. Следовательно MO – серединный перпендикуляр к стороне AS. Аналогично, NO – серединный перпендикуляр к DS. Таким образом, точка O – центр описанной около треугольника ASD окружности, а AO – ее радиус. Запишем формулу для радиуса описанной окружности $AO = \frac{AD}{2 \cdot \sin \angle S}$. Отсюда $AD = \sqrt{3}$.



Ответ: $\sqrt{3}$.

9. Найдите количество цифр в десятичной записи числа 2^{120}, если известно, что десятичная запись числа 2^{200} содержит 61 цифру.

Решение:

Чтобы понять сколько цифр содержится в записи натурального числа a, надо найти такое неотрицательное целое число n, что будет справедливым неравенство $10^{n-1} \leq a < 10^n$. Такое число n, очевидно, единственно. (Например, $10^2 \leq 992 < 10^3$, поэтому в записи числа 992 три цифры.) Итак, надо найти такое целое неотрицательное n, что $10^n \leq 2^{120} < 10^{n+1}$. По условию $10^{60} \leq 2^{200} < 10^{61}$. Возведя обе части в степень $\frac{3}{5}$, получим $10^{36} \leq 2^{120} < 10^{36+\frac{3}{5}}$. Значит, в десятичной записи числа 2^{120} содержится 37 цифр.

Ответ: 37.

5. Обозначим через $a_{n,m}$ число, полученное записью подряд всех чисел от n до m включительно, здесь n и m – натуральные числа, причем $n > m \geq 1$. Так, например, число $a_{4,2} = 432$, а число $a_{11,7} = 1110987$. Докажите, что среди таких чисел есть число, делящееся на 2021.

Решение:

Рассмотрим числа вида $a_{n,1}$. Так как чисел указанного вида бесконечно много, то среди них найдутся два числа $a_{n,1}$ и $a_{k,1}$, $n > k$, имеющие одинаковые остатки от деления на 2021. Тогда разность $a_{n,1} - a_{k,1}$ делится нацело на 2021. При этом $a_{n,1} - a_{k,1} = a_{n,k+1} \cdot 10^{n-k}$. Так как числа 2021 и 10^{n-k} взаимно простых, то число $a_{n,k+1}$ делится нацело на 2021.

6. Докажите, что система уравнений не имеет решений.

$$\begin{cases} x^3 + x + y + 1 = 0 \\ yx^2 + x + y = 0 \\ y^2 + y - x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Решение:

Заметим, что $y(x^3 + x + y + 1) - x(yx^2 + x + y) = y^2 + y - x^2 = 0$, что противоречит третьему равенству системы.

7. Зафиксируем 10 натуральных чисел $n_1, n_2, \dots, n_{10}$ и обозначим через n их сумму $n = n_1 + \dots + n_{10}$. Предположим теперь, что на доске в строчку записаны n чисел $a_1, \dots, a_n$, каждое из которых равно либо 0, либо 1. Эти числа (в том порядке как они записаны) разбивают на 10 групп:

$$\underbrace{a_1, \dots, a_{n_1}}_{n_1}, \underbrace{a_{n_1+1}, \dots, a_{n_1+n_2}}_{n_2}, \dots, \underbrace{a_{n_1+\dots n_9+1}, \dots, a_n}_{n_{10}}.$$

Группу назовем ненулевой, если в ней содержится хотя бы одна 1. В результате разбиения, в зависимости от того какие числа $a_1, \dots, a_n$ были взяты изначально, можно получить то или иное число ненулевых групп. Нас будут интересовать такие наборы $a_1, \dots, a_n$, которые при указанном разбиении дают четное число ненулевых групп. Докажите, что число таких наборов $a_1, \dots, a_n$ (где ненулевых групп будет четно) находится по формуле

$$2^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot (2^{n_1} - 2) \cdot (2^{n_2} - 2) \cdot \dots \cdot (2^{n_{10}} - 2).$$

Решение:

Искомое число наборов находим суммируя количество наборов с заданным числом k ненулевых групп:

При k=0 такой набор единственный;

При k=2 $\sum_{1\le i<j\le 10}(2^{n_i}-2)\cdot(2^{n_j}-2)$;

при k=4 $\sum_{1\le i<j<l<s\le 10}(2^{n_i}-2)\cdot(2^{n_j}-2)\cdot(2^{n_l}-2)\cdot(2^{n_s}-2)$;

…

при k=10 $(2^{n_1}-2)\cdot(2^{n_2}-2)\cdot\ldots\cdot(2^{n_{10}}-2)$.

Определим многочлены $\sigma_k(x_1,\ldots,x_{10})=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le 10}x_{i_1},\ldots,x_{i_{10}}$.

Тогда искомое число равно $N=\sigma_0(2^{n_1}-1,\ldots,2^{n_{10}}-1)+\sigma_2(2^{n_1}-1,\ldots,2^{n_{10}}-1)+\cdots+\sigma_{10}(2^{n_1}-1,\ldots,2^{n_{10}}-1)$.

Заметим, что

$$\sigma_0(x_1,\ldots,x_{10})+\sigma_1(x_1,\ldots,x_{10})+\cdots+\sigma_{10}(x_1,\ldots,x_{10})=(x_1+1)\cdot\ldots\cdot(x_{10}+1);$$

$$\sigma_0(-x_1,\ldots,-x_{10})+\sigma_1(-x_1,\ldots,-x_{10})+\cdots+\sigma_{10}(-x_1,\ldots,-x_{10})=(-x_1+1)\cdot\ldots\cdot(-x_{10}+1);$$

$$\sigma_0(x_1,\ldots,x_{10})+\sigma_1(x_1,\ldots,x_{10})+\cdots+\sigma_{10}(x_1,\ldots,x_{10})+$$

$$+\sigma_0(-x_1,\ldots,-x_{10})+\sigma_1(-x_1,\ldots,-x_{10})+\cdots+\sigma_{10}(-x_1,\ldots,-x_{10})$$
$$=2(\sigma_0(x_1,\ldots,x_{10})+\sigma_2(x_1,\ldots,x_{10})+\cdots+\sigma_{10}(x_1,\ldots,x_{10})).$$

Отсюда получим $\sigma_0(x_1,\ldots,x_{10})+\sigma_2(x_1,\ldots,x_{10})+\cdots+\sigma_{10}(x_1,\ldots,x_{10})=\frac{1}{2}((x_1+1)\cdot\ldots\cdot(x_{10}+1)+(-x_1+1)\cdot\ldots\cdot(-x_{10}+1))$.

Следовательно,

$$N=\frac{1}{2}\cdot 2^{n_1}\cdot\ldots 2^{n_{10}}+(-2^{n_1}+1+1)\cdot\ldots\cdot(-2^{n_{10}}+1+1)=2^{n-1}+\frac{1}{2}\cdot(2^{n_1}-2)\cdot\ldots\cdot(2^{n_{10}}-2).$$

11 КЛАСС

1. Есть 101 клетка. Двое поочередно слева направо вписывают в эти клеточки по одной из цифр от 0 до 9. Если после заполнения всех клеток сумма всех записанных цифр будет делиться на 11, то выиграет игрок, ходивший первым, а если не будет делиться на 11 – то вторым. Какой из игроков выиграет при правильной своей игре и любой игре соперника? Ответ обосновать.

Решение:

Выигрышная стратегия будет у первого игрока. Опишем её:

Чтобы выиграл первый игрок, нам необходимо, чтобы на 101 шаге сумма всех цифр делилась на 11, то есть остаток от деления на 11 был равен "0". Мы сможем это обеспечить тогда и только тогда, когда после 100-ого шага сумма всех цифр будет давать любой остаток от деления на 11, кроме "1". Чтобы это гарантировать, после 99-ого шага сумма должна давать остаток "2". Это получится, если на 98-ом шаге, остаток будет любым, кроме "3". Тогда первому игроку на 97-ом шаге надо обеспечить остаток "4", на 95-ом остаток "6", 93-ем остаток "8", 91-ом остаток 10, 89-ом остаток "1", и так далее, на 3-ем остаток "10", на 1-ом остаток "1".

Ответ: первый игрок.

2. Найдите количество цифр в десятичной записи числа 2^{100}, если известно, что десятичная запись числа 2^{200} содержит 61 цифру.

Решение:

Чтобы понять сколько цифр содержится в записи натурального числа a, надо найти такое неотрицательное целое число n, что будет справедливым неравенство $10^{n-1} \le a < 10^n$. Такое число n, очевидно, единственно. (Например, $10^2 \le 992 < 10^3$, поэтому в записи числа 992 три цифры.) Итак, надо найти такое целое неотрицательное n, что $10^n \le 2^{100} < 10^{n+1}$. По условию $10^{60} \le 2^{200} < 10^{61}$. Возведя обе части в степень $\frac{1}{2}$, получим $10^{30} \le 2^{100} < 10^{30+\frac{1}{2}}$. Значит, в десятичной записи числа 2^{100} содержится 31 цифра.

Ответ: 31.

3. Сократите дробь $\frac{2x^6+5x^4-3x^3+2x^2-12x-14}{4x^6-4x^4-6x^3-3x^2+25x-28}$. В результате сокращения степени многочленов в числителе и знаменателе должны уменьшиться.

Решение:

Найдем наибольший общий делитель многочленов, стоящих в числителе и знаменателе, используя алгоритм Евклида.

Для этого поделим с остатком знаменатель на числитель:

$$4x^6 - 4x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 25x - 28 =$$
$$= 2 \cdot (2x^6 + 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 12x - 14) - 14x^4 - 7x^2 + 49$$

В результате деления получили остаток $-14x^4 - 7x^2 + 49$. Теперь числитель (который сейчас выступал в роли делителя) поделим (например, «уголком») на остаток:

$$2x^6 + 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 12x - 14 == (-14x^4 - 7x^2 + 49) \cdot \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{2}{7}\right) + 4x^3 + 2x - 14.$$

Далее надо опять разделить делитель на остаток. В этот раз остаток от деления оказывается равным нулю:

$$-14x^4 - 7x^2 + 49 = -\frac{7x}{2} \cdot (4x^3 + 2x - 14).$$

Это означает, что многочлен $4x^3 + 2x - 14$ является искомым наибольшим общим делителем

числителя и знаменателя исходной дроби и он может быть «вынесен за скобки» (чтобы избежать появления дробных коэффициентов, будет удобнее использовать многочлен $2x^3+x-7$):
Итак,

$$\frac{2x^6+5x^4-3x^3+2x^2-12x-14}{4x^6-4x^4-6x^3-3x^2+25x-28}=\frac{(2x^3+x-7)\cdot(x^3+2x+2)}{(2x^3+x-7)\cdot(2x^3-3x+4)}.$$

Ответ: Например, $\frac{x^3+2x+2}{2x^3-3x+4}$.

4. Решите уравнение $8cos^5x-5cosx-2cos3x=1$.

Решение:

Надо догадаться выразить cos^5x через $\cos 5x$. Тогда исходное уравнение приведётся к виду $\cos 5x+cos3x=2$. Последнее равенство возможно только при выполнении условия $\begin{cases}\cos 5x=1\\ \cos 3x=1\end{cases} \Leftrightarrow x=2\pi n, n\in Z.$

Ответ: $x=2\pi n, n\in Z.$

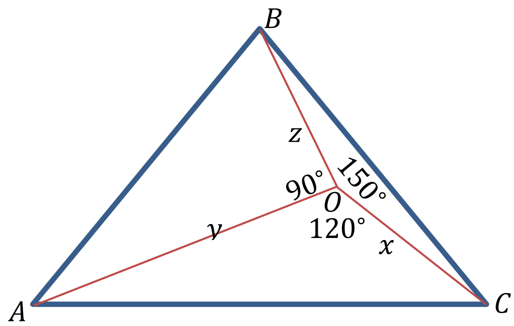
5. Известно, что положительные числа x, y, z удовлетворяют системе:

$$\begin{cases}x^2+y^2+xy=529\\ x^2+z^2+\sqrt{3}xz=441\\ z^2+y^2=144\end{cases}$$

Найдите значение выражения $\sqrt{3}xy+2yz+xz$.

Решение:

Рассмотрим треугольник ABC с выбранной внутри него точкой O так, что $AO=y,\ OB=z,\ OC=x$, $\angle AOB=90°,\ \angle AOC=120°,\ \angle BOC=150°$ (см. рис.). Условия системы представляют собой теорему косинусов (в т.ч. теорему Пифагора) для треугольников $AOB,\ AOC,\ BOC$.



Отсюда нетрудно понять, что $AB=12,\ BC=21,$ $AC=23$. Теперь заметим, что

$$\sqrt{3}xy+2yz+xz=4S_{AOC}+4S_{AOB}+4S_{BOC}=4(S_{AOC}+S_{AOB}+S_{BOC})=4S_{ABC}.$$

Площадь треугольника ABC найдем по формуле Герона:

$$p=\frac{12+21+23}{2}=28,\qquad S_{ABC}=56\sqrt{5}.$$

Следовательно, $4S_{ABC}=224\sqrt{5}$.

Ответ: $224\sqrt{5}$.

6. Зафиксируем 10 натуральных чисел $n_1, n_2, \dots, n_{10}$ и обозначим через n их сумму $n=n_1+\dots+n_{10}$. Предположим теперь, что на доске в строчку записаны n чисел $a_1,\dots,a_n$, каждое из которых равно либо 0, либо 1. Эти числа (в том порядке как они записаны) разбивают на 10 групп:

$$\underbrace{a_1,\dots,a_{n_1}}_{n_1},\underbrace{a_{n_1+1},\dots,a_{n_1+n_2}}_{n_2},\dots,\underbrace{a_{n_1+\dots n_9+1},\dots,a_n}_{n_{10}}.$$

Группу назовем ненулевой, если в ней содержится хотя бы одна 1. В результате разбиения, в зависимости от того какие числа $a_1,\dots,a_n$ были взяты изначально, можно получить то или иное число ненулевых групп. Нас будут интересовать такие наборы $a_1,\dots,a_n$, которые при указанном разбиении дают четное число ненулевых групп. Докажите, что число таких наборов $a_1, \dots, a_n$ (где ненулевых групп будет четно) находится по формуле:

$$2^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot (2^{n_1} - 2) \cdot (2^{n_2} - 2) \cdot \dots \cdot (2^{n_{10}} - 2).$$

Решение:

Искомое число наборов находим суммируя количество наборов с заданным числом k ненулевых групп:

При k=0 такой набор единственный;

При k=2 $\sum_{1 \le i < j \le 10} (2^{n_i} - 2) \cdot (2^{n_j} - 2)$;

при k=4 $\sum_{1 \le i < j < l < s \le 10} (2^{n_i} - 2) \cdot (2^{n_j} - 2) \cdot (2^{n_l} - 2) \cdot (2^{n_s} - 2)$;

…

при k=10 $(2^{n_1} - 2) \cdot (2^{n_2} - 2) \cdot \dots \cdot (2^{n_{10}} - 2)$.

Определим многочлены $\sigma_k(x_1, \dots, x_{10}) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le 10} x_{i_1}, \dots, x_{i_{10}}$.

Тогда искомое число равно $N = \sigma_0(2^{n_1} - 1, \dots, 2^{n_{10}} - 1) + \sigma_2(2^{n_1} - 1, \dots, 2^{n_{10}} - 1) + \dots + \sigma_{10}(2^{n_1} - 1, \dots, 2^{n_{10}} - 1)$.

Заметим, что

$$\sigma_0(x_1, \dots, x_{10}) + \sigma_1(x_1, \dots, x_{10}) + \dots + \sigma_{10}(x_1, \dots, x_{10}) = (x_1 + 1) \cdot \dots \cdot (x_{10} + 1);$$

$$\sigma_0(-x_1, \dots, -x_{10}) + \sigma_1(-x_1, \dots, -x_{10}) + \dots + \sigma_{10}(-x_1, \dots, -x_{10}) = (-x_1 + 1) \cdot \dots \cdot (-x_{10} + 1);$$

$$\sigma_0(x_1, \dots, x_{10}) + \sigma_1(x_1, \dots, x_{10}) + \dots + \sigma_{10}(x_1, \dots, x_{10}) +$$

$$+ \sigma_0(-x_1, \dots, -x_{10}) + \sigma_1(-x_1, \dots, -x_{10}) + \dots + \sigma_{10}(-x_1, \dots, -x_{10}) \\ = 2(\sigma_0(x_1, \dots, x_{10}) + \sigma_2(x_1, \dots, x_{10}) + \dots + \sigma_{10}(x_1, \dots, x_{10})).$$

Отсюда получим $\sigma_0(x_1, \dots, x_{10}) + \sigma_2(x_1, \dots, x_{10}) + \dots + \sigma_{10}(x_1, \dots, x_{10}) = \frac{1}{2}((x_1 + 1) \cdot \dots \cdot (x_{10} + 1) + (-x_1 + 1) \cdot \dots \cdot (-x_{10} + 1))$.

Следовательно,

$$N = \frac{1}{2} \cdot 2^{n_1} \cdot \dots 2^{n_{10}} + (-2^{n_1} + 1 + 1) \cdot \dots \cdot (-2^{n_{10}} + 1 + 1) = 2^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot (2^{n_1} - 2) \cdot \dots \cdot (2^{n_{10}} - 2).$$

7. Обозначим через $a_{n,m}$ число, полученное записью подряд всех натуральных чисел от n до m, здесь n и m – натуральные числа, причем $n > m \ge 1$. Так, например, число $a_{4,2} = 432$, а число $a_{11,7} = 1110987$. Докажите, что среди таких чисел есть число, делящееся на 2022.

Решение:

Рассмотрим числа вида $a_{n,1}$, где n – нечётное. Так как чисел указанного вида бесконечно много, то среди них найдутся два числа $a_{n,1}$ и $a_{k,1}$, $n > k$, имеющие одинаковые остатки от деления на 2022. Тогда разность $a_{n,1} - a_{k,1}$ делится нацело на 2022. При этом $a_{n,1} - a_{k,1} = a_{n,k+1} \cdot 10^{n-k}$ и число $a_{n,k+1}$ является чётным. Так как $2022 = 2 \cdot 1011$ и числа 1011 и 10^{n-k} взаимно просты, то число $a_{n,k+1}$ делится нацело на 1011, а следовательно, и на 2022.

8. Решите уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 6xy$, где x и y – натуральные числа

Решение:

Докажем вспомогательное утверждение.

Утверждение. Пусть пара натуральных чисел (x_0, y_0) удовлетворяет исходному уравнению

$$x^2 + y^2 + 1 = 6xy. \qquad (1)$$

Тогда

1) $x_0 \neq y_0$;

2) уравнение (1) имеет еще одно решение в натуральных числах $(6y_0 - x_0, y_0)$.

Доказательство:

1) Положив $x_0 = y_0 = a$ и подставив в (1), получим $2a^2 + 1 = 6a^2$. Очевидно, что $a \notin \mathbb{N}$,

2) По условию, число x_0 является корнем многочлена

$$\psi(x) = x^2 - 6y_0x + y_0^2 + 1. \qquad (2)$$

По теореме Виета, этот многочлен еще имеет корень x_2, причем $x_2 + x_0 = 6y_0, x_2x_0 = y_0^2 + 1$. Отсюда следует, что $x_2 = 6y_0 - x_0$ и $x_2 \in \mathbb{N}$.

Утверждение доказано.

Предположим, что какое-то решение (x_0, y_0) уравнения (1) найдено. Без ограничения общности можно считать, что в этой паре $x_0 > y_0$ (неравенство строгое в силу пункта 1 утверждения). Будем это записывать как $\max(x_0, y_0) = x_0$. Согласно утверждению, уравнение (1) еще имеет решение $(6y_0 - x_0, y_0)$. Это означает, что для многочлена (2) справедливы равенства $\psi(x_0) = \psi(6x_0 - y_0) = 0$. Заметим, что $\psi(y_0) = y_0^2 - 6y_0^2 + y_0^2 + 1 < 0$. Поэтому число y_0 лежит между корнями многочлена (2), а именно: $x_0 > y_0 > 6y_0 - x_0$. Следовательно, $\max(6y_0 - x_0, y_0) = y_0 < \max(x_0, y_0)$. Итак, для любого решения (x_0, y_0) существует другое решение, у которого максимальный элемент окажется меньше. Таким образом, мы можем строить новые решения, у которых максимальный элемент становится все меньше. Но при этом этот максимальный элемент, постоянно уменьшаясь, остается натуральным числом, что невозможно. Пришли к противоречию. Значит, исходное уравнение (1) решений в натуральных числах не имеет.

Ответ: Таких пар нет.

ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

9 КЛАСС

1. У Олега есть 550 рублей, и он хочет подарить маме на 8 Марта тюльпаны, причем непременно их должно быть нечётное число, и ни один оттенок цвета не должен повторяться. В магазине, куда пришел Олег, один тюльпан стоит 49 рублей, и есть в наличии цветы одиннадцати оттенков. Сколько существует способов у Олега подарить маме цветы? (Ответ в задаче должен быть компактным выражением, не содержащим знаков суммирования, многоточий и т.п.)

Решение:

Из условия очевидно, что максимальное количество цветов в букете – 11.

1 способ

Используя свойство биномиальных коэффициентов

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1},$$

а также учитывая их комбинаторный смысл, получим, что число способов сформировать букет из нечетного количества цветов не более 11-ти оттенков (при условии, что ни один оттенок не должен повторяться) равно:

$$C_{11}^1 + C_{11}^3 + C_{11}^5 + \cdots + C_{11}^{11} = 2^{10} = 1024.$$

2 способ

Рассмотрим 10 цветов 10 различных оттенков. Собрать букет из этих цветов без учёта чётности можно 2^{10} способами. Если в букете нечётное количество цветов, то мы его оставляем, если же чётное – добавляем неиспользованный одиннадцатый цветок. Таким образом, общее количество способов собрать букет равно 2^{10}.

Ответ: 1024.

2. Отличные от нуля числа a и b являются корнями квадратного уравнения $x^2 - 5px + 2p^3 = 0$. Уравнение $x^2 - ax + b = 0$ имеет единственный корень. Найдите p. Решение обоснуйте.

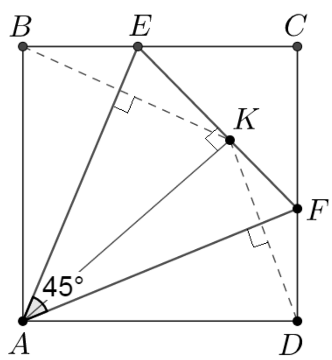
Решение:

Так как уравнение $x^2 - ax + b = 0$ имеет единственный корень, то $b = \frac{a^2}{4}$. По теореме Виета имеем равенства: $a + b = 5p; ab = 2p^3$.

Подставляя $b = \frac{a^2}{4}$ в последнее равенство, получим: $a = 2p$. Учитывая, что a и b отличны от нуля, найдём $p = 3$.

Ответ: 3.

3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки E и F таким образом, что угол EAF равен 45^0. Длина стороны квадрата равна 1. Найдите периметр треугольника CEF. Решение обоснуйте.



Решение:

Если отразить точку D относительно прямой AF, а затем относительно прямой AE, то она перейдет в точку B. Действительно, композиция двух осевых симметрий относительно пересекающихся прямых – это поворот на удвоенный угол между прямыми. То есть в нашем случае эти две симметрии эквивалентны повороту на угол 90^0 относительно точки A.

Это означает, что образ точки D при симметрии относительно AF и образ точки B при симметрии относительно AE – это одна и та же точка; на рисунке она обозначена K. Из точки K отрезки AE и AF видны под углом 90^0 (при симметрии сохраняются величины углов, поэтому, например, углы ABE и AKE равны). Значит точка K – это основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую EF.

И, наконец, поскольку $BE = EK$ и $DF = FK$ (при симметрии длины отрезков сохраняются), видим, что периметр треугольника CEF равен сумме длин сторон BC и CD квадрата.

Ответ: 2.

4. Известно, что число $\cos 6^0$ является корнем уравнения $32t^5 - 40t^3 + 10t - \sqrt{3} = 0$. Найдите остальные четыре корня этого уравнения. (Ответы в задаче должны быть компактными выражениями, не содержащими знаков суммирования, многоточий и радикалов.)

Решение:

$\cos 5x = 16cos^5x - 20cos^3x + 5cosx$. Тогда остальными корнями уравнения будут числа $\cos 66^0$, $\cos 78^0$, $\cos 138^0$, $\cos 150^0$.

Ответ: $\cos 66^0$, $\cos 78^0$, $\cos 138^0$, $\cos 150^0$

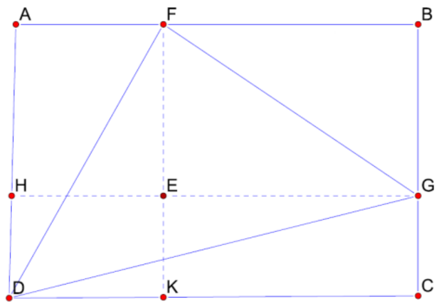
5. Найти площадь многоугольника, координаты вершин которого являются решениями системы уравнений $\begin{cases} x^4 + \frac{7}{2}x^2y + 2y^3 = 0 \\ 4x^2 + 7xy + 2y^3 = 0 \end{cases}$.

Решение:

Система уравнений и имеет всего три действительных решения: $(0;0), (2;-1), \left(-\frac{11}{2}; -\frac{11}{2}\right)$. Площадь треугольника, вершины которого имеют такие координаты, равна $16\frac{1}{2}$.

Ответ: $16\frac{1}{2}$

6. На сторонах AB и BC прямоугольника $ABCD$ выбраны точки F и G соответственно. На сторону CD из точки F опущен перпендикуляр FK. На сторону AD из точки G опущен перпендикуляр GH. Точка пересечение FK и GH обозначена через E. Найдите площадь треугольника DFG, если известно, что площади прямоугольников $ABCD$ и $HEKD$ равны 20 и 8 соответственно.



Решение:

Пусть $AD = a$, $DC = b$, $HD = x$, а $DK = y$.

$$S_{DFG} = S_{ABCD} - S_{AFD} - S_{FGB} - S_{DGC} = ab - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}(b-y)(a-x) - \frac{1}{2}bx$$
$$= ab - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}ay(ab - bx - ay + xy) - \frac{1}{2}bx$$
$$= ab - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}bx = \frac{ab - xy}{2} = \frac{S_{ABCD} - S_{HEKD}}{2} = 6$$

Ответ: 6

10 КЛАСС

1. У Олега есть 550 рублей, и он хочет подарить маме на 8 Марта тюльпаны, причем непременно их должно быть нечётное число, и ни один оттенок цвета не должен повторяться. В магазине, куда пришел Олег, один тюльпан стоит 49 рублей, и есть в наличии цветы одиннадцати оттенков. Сколько существует способов у Олега подарить маме цветы? (Ответ в задаче должен быть компактным выражением, не содержащим знаков суммирования, многоточий и т.п.)

Решение:

1 способ

Используя свойство биномиальных коэффициентов

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1},$$

а также учитывая их комбинаторный смысл, получим, что число способов сформировать букет из нечетного количества цветов не более 11-ти оттенков (при условии, что ни один оттенок не должен повторяться) равно:

$$C_{11}^1 + C_{11}^3 + C_{11}^5 + \cdots + C_{11}^{11} = 2^{10} = 1024.$$

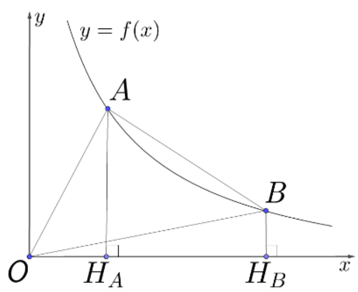
2 способ

Рассмотрим 10 цветов 10 различных оттенков. Собрать букет из этих цветов без учёта чётности можно 2^{10} способами. Если в букете нечётное количество цветов, то мы его оставляем, если же чётное – добавляем неиспользованный одиннадцатый цветок. Таким образом, общее количество способов собрать букет равно 2^{10}.

Ответ: 1024.

2. Функция $y = f(x)$ определена на множестве $(0, +\infty)$ и принимает на нем положительные значения. Известно, что для любых точек A и B на графике функции площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой (H_A, H_B — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось абсцисс; O – начало координат). Найдите все такие функции.

При условии $f(1) = 4$ запишите в ответ число $f(4)$.



Решение:

Пусть M – точка пересечения отрезков OB и AH_A. Так как площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой, то площади треугольников AMO и трапеции MBH_BH_A также равны между собой. Отсюда следует, что равны и площади треугольников AOH_A и BOH_B. Пусть абсциссы точек H_A и H_B равны x и t соответственно. Тогда имеем равенство $x \cdot f(x) = t \cdot f(t)$. При фиксированном t получаем вывод: $f(x) = \frac{c}{x}, c > 0$.

Ответ: 1

3. Пусть x_1 и x_2 - наибольшие корни многочленов $f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4$ и $g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$ соответственно. Найдите $\frac{x_2}{x_1}$.

Решение:

Заметим, что $f(-2) > 0, f(-1) < 0, f(0) > 0, f(1) < 0, f(3) > 0$. Следовательно, многочлен $f(x)$ имеет 4 действительных корня. Аналогично, из неравенств $g(-4) > 0, g(-2) < 0, g(0) > 0, g(2) < 0, g(5) > 0$ следует, что многочлен $g(x)$ имеет 4 действительных корня.

Сравнение коэффициентов многочленов

$$f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4 \text{ и } g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$$

показывает, что в соответствии с формулами Виета корни многочлена $g(x)$ являются удвоенными корнями многочлена $f(x)$. Отсюда вытекает, что $\frac{x_2}{x_1} = 2$.

Ответ: 2.

4. Вычислите с точностью до одной десятой значение выражения $\sqrt{86+41\sqrt{86+41\sqrt{86+\ldots}}}$

Решение:

Рассмотрим строго возрастающую последовательность значений:

$$\sqrt{86}, \sqrt{86+41\sqrt{86}}, \sqrt{86+41\sqrt{86+41\sqrt{86}}}, \ldots$$

Если эта последовательность ограничена сверху, то значением F является точная верхняя граница, и тогда F – действительное число. Таким образом, достаточно доказать ограниченность указанной последовательности. Докажем, что эта последовательность сверху ограничена числом 43. Действительно,

$$\sqrt{86} < 43, \Rightarrow 41\sqrt{86} < 41 \cdot 43 \Rightarrow 86 + 41\sqrt{86} < 86 + 41 \cdot 43 = 43^2 \Rightarrow \Rightarrow \sqrt{86+41\sqrt{86}} < 43 \text{ и т. д.}$$

Очевидно из условия, что F является положительным корнем уравнения $F^2 = 86 + 41F$. Отсюда находим $F = 43$.

Ответ: 43.

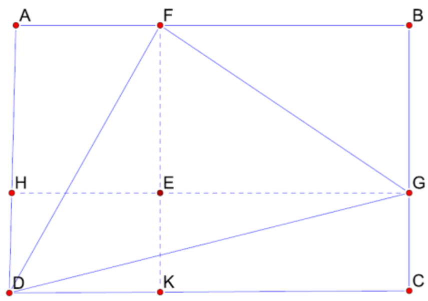
5. Известно, что число $\cos 6^0$ является корнем уравнения $32t^5 - 40t^3 + 10t - \sqrt{3} = 0$. Найдите остальные четыре корня этого уравнения. (Ответы в задаче должны быть компактными выражениями, не содержащими знаков суммирования, многоточий и радикалов.)

Решение:

$\cos 5x = 16cos^5x - 20cos^3x + 5cosx$. Тогда остальными корнями уравнения будут числа $\cos 66^0$, $\cos 78^0$, $\cos 138^0$, $\cos 150^0$.

Ответ: $\cos 66^0$, $\cos 78^0$, $\cos 138^0$, $\cos 150^0$

6. На сторонах AB и BC прямоугольника $ABCD$ выбраны точки F и G соответственно. На сторону CD из точки F опущен перпендикуляр FK. На сторону AD из точки G опущен перпендикуляр GH. Точка пересечение FK и GH обозначена через E. Найдите площадь треугольника DFG, если известно, что площади прямоугольников $ABCD$ и $HEKD$ равны 20 и 8 соответственно.



Решение:

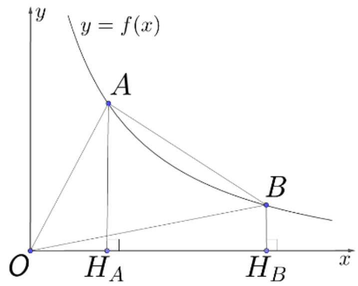
Пусть $AD = a$, $DC = b$, $HD = x$, а $DK = y$.

$$S_{DFG} = S_{ABCD} - S_{AFD} - S_{FGB} - S_{DGC} = ab - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}(b-y)(a-x) - \frac{1}{2}bx$$
$$= ab - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}ay(ab - bx - ay + xy) - \frac{1}{2}bx$$
$$= ab - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}bx = \frac{ab - xy}{2} = \frac{S_{ABCD} - S_{HEKD}}{2} = 6$$

Ответ: 6

11 КЛАСС

1. Функция $y = f(x)$ определена на множестве $(0, +\infty)$ и принимает на нем положительные значения. Известно, что для любых точек A и B на графике функции площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой (H_A, H_B — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось абсцисс; O – начало координат). Найдите все такие функции. При условии $f(1) = 4$ запишите в ответ число $f(4)$.



Решение:
Пусть M – точка пересечения отрезков OB и AH_A. Так как площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой, то площади треугольников AMO и трапеции MBH_BH_A также равны между собой. Отсюда следует, что равны и площади треугольников AOH_A и трапеции BOH_B. Пусть абсциссы точек H_A и H_B равны x и t соответственно. Тогда имеем равенство $x \cdot f(x) = t \cdot f(t)$. При фиксированном t получаем вывод: $f(x) = \frac{c}{x}, c > 0$.

Ответ: 1

2. Пусть x_1 и x_2 - наибольшие корни многочленов

$$f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4$$

и

$$g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$$

соответственно. Найдите $\frac{x_2}{x_1}$.

Решение:
Заметим, что $f(-2) > 0, f(-1) < 0, f(0) > 0, f(1) < 0, f(3) > 0$. Следовательно, многочлен $f(x)$ имеет 4 действительных корня. Аналогично, из неравенств $g(-4) > 0, g(-2) < 0, g(0) > 0, g(2) < 0, g(5) > 0$ следует, что многочлен $g(x)$ имеет 4 действительных корня.
Сравнение коэффициентов многочленов

$$f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4 \text{ и } g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$$

показывает, что в соответствии с формулами Виета корни многочлена $g(x)$ являются удвоенными корнями многочлена $f(x)$. Отсюда вытекает, что $\frac{x_2}{x_1} = 2$.

Ответ: 2.

3. Вычислите с точностью до одной десятой значение выражения $\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + \ldots}}}$

Решение:
Рассмотрим строго возрастающую последовательность значений:

$$\sqrt{86}, \sqrt{86 + 41\sqrt{86}}, \sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86}}}, \ldots$$

Если эта последовательность ограничена сверху, то значением F является точная верхняя граница, и тогда F – действительное число. Таким образом, достаточно доказать ограниченность указанной последовательности. Докажем, что эта последовательность сверху ограничена числом 43. Действительно,

$\sqrt{86} < 43, \Rightarrow 41\sqrt{86} < 41 \cdot 43 \Rightarrow 86 + 41\sqrt{86} < 86 + 41 \cdot 43 = 43^2 \Rightarrow \sqrt{86 + 41\sqrt{86}} < 43$ и т. д.

Очевидно, из условия, что F является положительным корнем уравнения $F^2 = 86 + 41F$. Отсюда находим $F = 43$.

Ответ: 43.

4. Известно, что число $\cos 6^0$ является корнем уравнения $32t^5 - 40t^3 + 10t - \sqrt{3} = 0$. Найдите остальные четыре корня этого уравнения. (Ответы в задаче должны быть компактными выражениями, не содержащими знаков суммирования, многоточий и радикалов.)

Решение:

$\cos 5x = 16cos^5x - 20cos^3x + 5cosx$. Тогда остальными корнями уравнения будут числа $\cos 66^0$, $\cos 78^0$, $\cos 138^0$, $\cos 150^0$.

Ответ: $\cos 66^0$, $\cos 78^0$, $\cos 138^0$, $\cos 150^0$

5. Найти площадь геометрической фигуры, координаты вершин которой являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} x^4 + \frac{7}{2}x^2y + 2y^3 = 0 \\ 4x^2 + 7xy + 2y^3 = 0 \end{cases}.$$

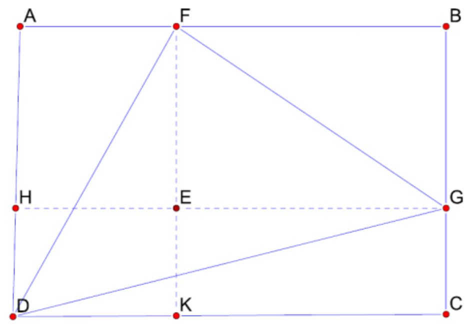
Решение:

Система уравнений и имеет всего три действительных решения: $(0;0), (2;-1), \left(-\frac{11}{2}; -\frac{11}{2}\right)$.

Площадь треугольника, вершины которого имеют такие координаты, равна $16\frac{1}{2}$.

Ответ: $16\frac{1}{2}$

6. На сторонах AB и BC прямоугольника $ABCD$ выбраны точки F и G соответственно. На сторону CD из точки F опущен перпендикуляр FK. На сторону AD из точки G опущен перпендикуляр GH. Точка пересечение FK и GH обозначена через E. Найдите площадь треугольника DFG, если известно, что площади прямоугольников $ABCD$ и $HEKD$ равны 20 и 8 соответственно.



Решение:

Пусть *AD* = *a*, *DC* = *b*, *HD* = *x*, а *DK* = *y*.

$$S_{DFG} = S_{ABCD} - S_{AFD} - S_{FGB} - S_{DGC} = ab - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}(b-y)(a-x) - \frac{1}{2}bx$$
$$= ab - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}ay(ab - bx - ay + xy) - \frac{1}{2}bx$$
$$= ab - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}bx = \frac{ab - xy}{2} = \frac{S_{ABCD} - S_{HEKD}}{2} = 6$$

Ответ: 6